東京女子大学 Tokyo Woman's Christian University　新潟大學 NIIGATA UNIVERSITY

Press Release

報道機関各位

2023 年 11 月 10 日
東京女子大学
新潟大学

ラプラス作用素の固有値に関する形状最適化問題を計算機援用証明により解決

－ 太鼓の音と形状の関係性に迫る －

「太鼓の音から太鼓の形状の何が定まるのか？」━物体が振動する時の音から物体自身の形状を推定するという逆問題（注１）はスペクトル幾何学（注２）の基礎問題として、１００年以上多くの研究者を惹きつけてきました。太鼓の音（固有振動数）と太鼓の形状の関係は数学的にはラプラス作用素（注３）の固有値問題（注４）という偏微分方程式によって表現されます。ラプラス作用素の固有値と領域の形状の関係を解析するためには形状微分と呼ばれる「固有値問題の領域変数に関する微分値」の具体的な値を計算することが重要となります。20 世紀初頭から形状微分に対する理論的な解析が行われてきましたが、厳密な計算法の確立には至っていませんでした。

概要

東京女子大学数理科学科の劉雪峰教授と新潟大学自然科学研究科大学院生の遠藤凌輝は、計算機を用いた精度保証付き数値計算法（注５）、特に固有関数の誤差評価に関する最新理論を利用し、多角形領域におけるディリクレ境界条件（注６）、非斉次ノイマン境界条件（注７）の形状微分に対する厳密計算法を確立しました。さらに、当該計算法を用いて、1950 年代に G.ポリアらによって解決された三角形領域におけるディリクレ固有値の形状最適化問題を計算機援用証明という新たな手法によって再解決し、さらに実用問題に関わる非斉次ノイマン境界条件をもつ固有値の形状最適化問題を解決することによって、数値解析手法のひとつである有限要素法（注８）の誤差定数の挙動を明らかにしました。

【本研究成果のポイント】

- **過去 10 年に劉雪峰教授らが開発した固有値・固有関数に対する厳密数値計算の理論を用いて、これまで計算が困難だった固有値の形状微分に対する厳密計算法を確立しました。**
- **開発した形状微分の厳密計算法を用いて、一定の直径をもつ三角形領域の中でラプラス作用素のディリクレ第１固有値が最小となる形状の最適性をディリクレ・非斉次ノイマン境界条件のもと検証しました。**
- **開発された計算機援用証明は既存の理論的方法とは異なり、境界条件に依存しない解析手法を採用しています。このため、従来の理論的手法では困難であった複雑な境界条件を持つ固有値に関する形状最適化問題の解決に成功しました。**

Ⅰ．研究の背景

ラプラス作用素の固有値問題はユークリッド空間の領域上だけでなく、リーマン多様体やグラフなど様々な対象上で定義されています。固有値の解析は広い数学分野の基礎問題として、多くの研究者に興味を持たれています。しかしラプラス作用素の固有値問題は、最も基本的な図形である三角形領域においてでさえまだあまりよく理解されていません。

ラプラス作用素の固有値は適当な領域の設定に対して正の無限大に発散する非負の実数列です（図１）。固有値は、領域の形状、固有値の重複度、境界条件（例えば、ディリクレ境界条件、ノイマン境界条件、ロビン境界条件、ステクロフ境界条件）によって異なる振る舞いをするため、これらの問題を研究するためにはそれぞれの場合に対して異なる方法が期待されます。例えば、領域の変形に対する固有値の単調性はディリクレ境界条件に対してのみ有効であり、ノイマン境界条件には適用できません。

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \cdots, \quad \lim_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty.$$

図 1 ラプラス作用素の固有値の分布

多数の研究者の貢献があるにも関わらず、三角形の固有値に関する多くの問題が未だ未解決問題として残っています。以下に三角形の領域に関連するいくつかの予想と未解決の問題を挙げます。

1．三角形の太鼓の形を基音、2 倍音、3 倍音で聴けるか。つまりディリクレ第 1、2、3 固有値から三角形の形状を決定することはできるか？
2．与えられた直径をもつ三角形のうち、正三角形はディリクレ第 k（k≥ 4）固有値を最小化するか？
3．非正三角形のディリクレ第 2 固有値は単純であるか？
4．一定の面積を持つ n 角形（n=3,4,⋯）のうち、ノイマン第 2 固有値を最大化するものは正 N 角形であるか？

Ⅱ．研究の概要と成果

本研究では三角形領域に対する第 1 固有値の形状最適化問題に対して、ディリクレ境界条件だけでなく非斉次ノイマン境界条件といった複雑な境界条件をもつ問題にも対応可能な検証法を開発しました。 本研究により、一定の直径をもつ三角形のうち正三角形が最初のラプラス作用素の第 1 固有値を最小化することが２つの境界条件（ディリクレ、非斉次ノイマン境界条件)のもと証明されました。

本研究で検討した非斉次ノイマン境界条件の固有値問題は有限要素法による微分作用素の固有値の下界評価に由来しています。2015 年、劉教授（研究当時・新潟大学自然科学系（理学部）准教授）は 2 次元領域におけるラプラス作用素の固有値 λ_k に対して、

$$\lambda_k \ge \frac{\lambda_{k,h}}{1+(0.1893h)^2\lambda_{k,h}}$$

という計算可能な下界評価式を導出しました。ここで、h は有限要素法による三角形メッシュのサイズであり、$\lambda_{k,h}$ は Crouzeix-Raviart 有限要素空間による離散化固有値です。定数 0.1893 は Crouzeix-Raviart 補間誤差の定数に密接しています。

ここで一つの疑問が生じます。「0.1893」 という値は固有値の下界評価に対して最適な定数なのでし

ょうか？Crouzeix-Raviart 補間誤差定数は三角形領域における非斉次ノイマン境界条件をもつ固有値問題で特徴づけられます。図 2 では、この補間誤差定数と三角形領域の角度 θ との関係が示されています。本研究では、定数を決める固有値に対する三角形領域の形状最適化問題において、固有値の形状微分の範囲を厳密に算出する方法で、最大辺長が 1 の三角形の中で、 θ が $\pi/3$ の時の正三角形が Crouzeix-Raviart 補間誤差定数を最大化することを数学的に厳密に証明しました。また、「0.1893」は補間誤差定数の最大値としての良い近似値であり、最適な固有値の下界評価式を提供しています。

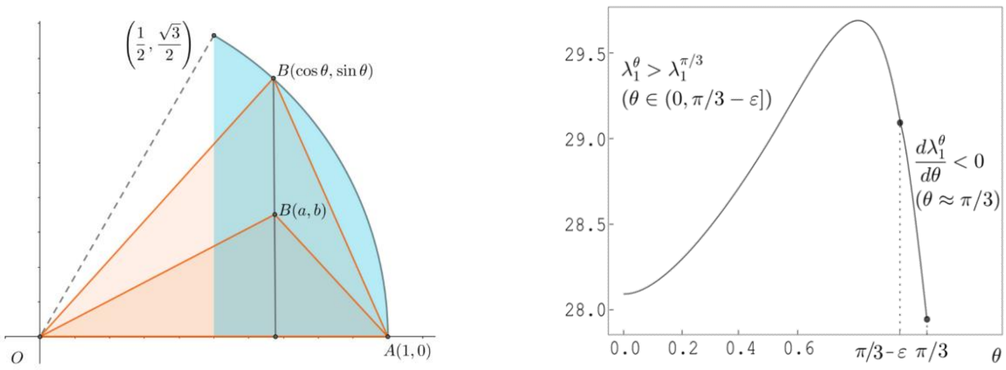

図 2 ：三角形の形状の変化（左）と補間誤差定数の値と角度θとの関係（右）

以下に、この論文の特徴をまとめます。

1. 本論文の形状微分公式の導出では基礎的な関数解析の知識のみが利用され、形状微分公式の証明は領域の形状や境界条件（例えば、任意多角形領域、非斉次ノイマン境界条件）に依存しない議論となっています。
2. 近年開発された微分作用素の固有値と固有関数に対する精度保証理論を用いた評価により、形状微分の具体的な値を厳密に評価することが可能となりました。純粋に理論的な評価方法と比較して、固有値の形状最適化問題に対してより直接的な分析が可能になりました。

III. 今後の展開

今後の展開の方向として「形状微分の精度保証付き数値計算」の拡張、そしてその応用という 2 つの方向を考えています。潰れた領域やなめらかな境界をもつ領域において形状微分を厳密評価し、2 階形状微分の具体的な値の厳密評価を可能にすることで、固有値に関する領域の形状最適化問題だけでなく、領域の形状決定問題「太鼓の形を聴く」の計算機援用証明に取り組んでいきたいと考えています。

IV. 研究成果の公表

2023 年 9月25日、科学誌「Journal of Differential Equations」に掲載されました。
論文タイトル：Shape optimization for the Laplacian eigenvalue over triangles and its application to interpolation error constant estimation
著者：遠藤 凌輝（新潟大学）、劉 雪峰（東京女子大学）
doi：10.1016/j.jde.2023.09.016
アクセス： https://doi.org/10.1016/j.jde.2023.09.016

V. 謝辞

本研究は、科学研究費補助事業（20KK0306、20H01820、21H00998、18K03411）の支援を受けて行われました。

【用語解説】

（注１）逆問題：ある出力結果から、その原因となる入力やパラメータを推定する問題のこと。逆問題は多くの科学技術分野で重要な役割を果たしている。

（注２）スペクトル幾何学：図形や多様体の形状をそのラプラス作用素の固有値を用いて研究する数学の分野。

（注３）ラプラス作用素：微分方程式論において非常に重要な役割を果たす 2 階微分作用素。

（注４）固有値問題：微分という演算に関してスケールが変わっても形状が保持される場合について、その数値（固有値）と対応する関数（固有関数）を求める問題のこと。

（注５）精度保証付き数値計算：近似値に対する誤差の厳密な上界を求める数値計算の方法。数学的な命題に対する計算機援用証明に用いられる。

（注６）ディリクレ境界条件：境界上での関数の値が 0 であるという条件。

（注 7）非斉次ノイマン境界条件：境界上における法線方向の微分が与えられているという条件。

（注８）有限要素法：方程式が定義された領域を小領域（要素）に分割し、各小領域における方程式を比較的シンプルな関数で近似する手法のこと。

【お問い合わせ先】
（研究に関すること）
東京女子大学
現代教養学部 数理科学科 情報理学専攻
教授 劉雪峰
E-mail：xfliu@lab.twcu.ac.jp

（報道に関すること）
東京女子大学 広報課
TEL：03-5382-6476
FAX：03-3395-1212
E-mail：pr@office.twcu.ac.jp

新潟大学 広報事務室
TEL：025-262-7000
E-mail：pr-office@adm.niigata-u.ac.jp